MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Christelle BARATAY

en poche

6e édition

Pour maîtriser les calculs financiers en finance et en gestion de l'entreprise

- Opérations financières
- Calculs de placements et d'investissements financiers
- Calculs nécessaires à la gestion de l'entreprise

Gualino
un savoir-faire de Lextenso

MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Christelle BARATAY

en poche

6e édition

Pour maîtriser les calculs financiers en finance et en gestion de l'entreprise

Gualino
un savoir-faire de Lextenso

Du même auteur,
chez le même éditeur :

- **Carrés DCG 11** – Contrôle de gestion, 10^{e} éd. 2021-2022, à paraître (en coll. L. Monaco).
- **Carrés DCG 11** – Exercices de Contrôle de gestion, 7^{e} éd. 2020-2021.
- **Carrés DSCG 4** – Comptabilité et Audit, 8^{e} éd. 2021-2022.
- **Carrés DSCG 4** – Exercices corrigés de Comptabilité et Audit, 5^{e} éd. 2021-2022.

Christelle Baratay est formatrice en classes préparatoires au DCG et au DSCG.

Suivez-nous sur **www.gualino.fr**

Contactez-nous **gualino@lextenso.fr**

1, Parvis de La Défense
92044 Paris La Défense Cedex
978-2-297-13490-3
ISSN 1962-6428

Sommaire

1 RAPPELS MATHÉMATIQUES

ÉQUATION ET INÉQUATION

Définitions

Une ***équation*** est une égalité dans laquelle figure une ou plusieurs inconnues. Lorsque l'égalité est vérifiée, la ou les inconnues prennent différentes valeurs appelées solutions. Résoudre une équation revient à trouver toutes les solutions. L'ordre des termes n'a aucune importance (si a = b alors b = a).

Une ***inéquation*** est une inégalité dans laquelle figure une ou plusieurs inconnues. Elle peut prendre la forme : $a \leq b$ ou $a \geq b$.

Les différents types d'équations et d'inéquations

Équation à une variable de degré un : ax = b

Si $a \neq 0$ alors $x = \frac{b}{a}$. Il existe une solution et une seule.

Ce type d'équation se retrouve dans les problèmes relatifs à l'évaluation d'un capital à une date quelconque, dans le cas de l'équivalence de deux capitaux…

Équation à une variable de degré deux : $ax^2 + bx + c = 0$

Pour résoudre cette équation, il faut dans un premier temps calculer le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$ alors $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ l'équation a une seule solution.

Si $\Delta < 0$ il n'existe pas de solutions réelles à l'équation.

Équation à deux variables : ax + by = c

Il s'agit de l'équation d'une droite, sauf si a = b = 0.

Si $b \neq 0$ alors $y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b} \times$ avec $\frac{-a}{b}$ le ***coefficient directeur*** (ou pente) de la droite et $\frac{c}{b}$ l'ordonnée à l'origine.

Système de deux équations à deux variables

$$\begin{cases} ax + by = c \\ gx + hy = t \end{cases}$$

L'accolade signifie que les deux équations doivent être satisfaites en même temps. Pour ce faire, il existe différentes méthodes, les principales sont :

– ***la méthode par substitution*** qui permet de remplacer une variable dans une équation par sa valeur tirée de l'autre équation.

Par exemple : $\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ x + y = 3 \end{cases}$

L'équation 2 peut s'écrire sous la forme $y = 3 – x$; dans ce cas, en remplaçant y dans l'équation 1, celle-ci est transformée en une équation à une inconnue : $2x + 4\,(3 – x) = 8$, d'où $x = 2$ et donc $y = 3 – 2 = 1$;

– ***la méthode par élimination*** (Gauss) qui consiste à remplacer une équation par une autre, en multipliant celle-ci par un nombre non nul de telle sorte que le coefficient d'au moins une variable soit le même dans l'autre équation du système.

Toujours avec le même exemple, l'équation 2 peut être multipliée par 2 ou par 4. Ensuite, à l'aide des combinaisons linéaires, il sera possible de calculer x ou y, puis d'en déduire l'inconnue manquante.

Dans le cas présent, multiplions l'équation 2 par 2 :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$$

Puis effectuons la soustraction entre les deux équations, alors $2y = 2$, d'où $y = 1$ et $x = 2$.

Ce type de résolution est utile, par exemple, pour résoudre les problèmes relatifs à l'équivalence de deux effets de commerce.

Précisons que, en contrôle de gestion, il est possible d'utiliser la ***méthode graphique*** qui consiste à rechercher l'existence d'un point d'intersection entre les deux droites.

Inéquation à deux variables : $ax + by \leq c$

Ce type de système se retrouve en contrôle de gestion. Pour une résolution par le calcul, il faut introduire des variables d'écart afin de transformer une inéquation en équation (***méthode du simplexe***).

La solution graphique nécessite la représentation de la droite $ax + by = c$, puis la détermination du demi-plan qui satisfait à l'inéquation.

FONCTIONS : $y = f(x)$

La fonction affine : $y = ax + b$

Cette fonction est une droite de pente a, croissante si $a > 0$ et décroissante si $a < 0$.

La fonction logarithme népérien (ln)

Elle est notée $y = \ln(x)$. Cette fonction est souvent utilisée en mathématiques financières afin de déterminer les durées. Ses propriétés sont les suivantes :

$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) – \ln(b)$$

$$\ln(x)^n = n \ln(x)$$

Parfois, il peut être fait référence au logarithme à base a (avec $a > 0$) de x : $\log_a (x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Le logarithme népérien est le logarithme à base e (exponentielle) ($\ln(e) = 1$).

La fonction exponentielle : $y = e^x$

Il s'agit de la fonction telle que $x = \ln(y)$, on note $y = e^x$.

Ses propriétés sont les suivantes :

$e^{a+b} = e^a e^b$

$(e^a)^b = e^{ab}$

$\ln(e^a) = a$

$e^{\ln(b)} = b$

La fonction puissance : $y = a^x$

Cette fonction est définie par $y = e^{x\ln(a)}$ pour tout $a > 0$.

De plus $x = \dfrac{\ln(y)}{\ln(a)} = \dfrac{\log y}{\log a}$

DÉRIVÉES

Soit f(x) définie sur]a ; b[, on appelle nombre dérivé de f en x_0 la quantité $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si elle existe ; notée $f'(x_0)$.

Si la dérivée est positive, alors la fonction est croissante ; si elle est négative, la fonction est décroissante.

Voici quelques dérivées :

Fonctions	***Dérivées***
x^r	$r\,x^{r-1}$
$u^r(x)$	$r\,u^{r-1}(x)\,u'(x)$
$\dfrac{1}{u(x)}$	$\dfrac{-u'(x)}{u^2(x)}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}$
A (constante)	0
x	1
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$
$u(x)\,v(x)$	$u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$
e^x	e^x
$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Si entre a et b la dérivée s'annule en x_0 en changeant de signe, alors la fonction admet un ***extremum*** en x_0 appelé ***tangente***.

EXPOSANTS ET FRACTIONS

Voici un tableau récapitulatif des principales propriétés :

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	Si $a^n = b$ alors $a = \sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$
$a^n a^m = a^{n+m}$	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
$(ab)^n = a^n b^n$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $ad = bc$
$(a^n)^m = a^{nm}$	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$a^0 = 1$

INTERPOLATION LINÉAIRE

Soit f la fonction définie sur [a ; b] et c un nombre réel dans cet intervalle.

L'interpolation linéaire permet de trouver l'image de c par f quand celle-ci ne peut pas être calculée. Cette méthode consiste à remplacer f(c) par g(c) ou g est la fonction affine telle que :

$g(a) = f(a)$

$g(b) = f(b)$

La méthode remplace la courbe représentative de f sur [a ; b] par la droite (AB) et de ce fait :

$$f(c) = f(a) + (c - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Exemple : Une personne décide d'investir dans un vélo pour 1 200 €. Le vendeur lui propose un crédit :

– 10 mensualités de 129,43 € chacune ;

– 1re mensualité, un mois après l'achat.

Quel est le taux mensuel équivalent correspondant à ce crédit ?

$$1\,200 = 129{,}43 \times \frac{1 - (1+i)^{-10}}{i} \text{ d'où } \frac{1 - (1+i)^{-10}}{i} = \frac{1\,200}{129{,}43} = 9{,}27142$$

En l'absence de solveur, il convient de procéder à une interpolation linéaire :

i	$a = 1\ \%$	$c = i\ \%$	$b = 1{,}5\ \%$
$\frac{1 - (1+i)^{-10}}{i}$	9,4713	9,27142	9,222

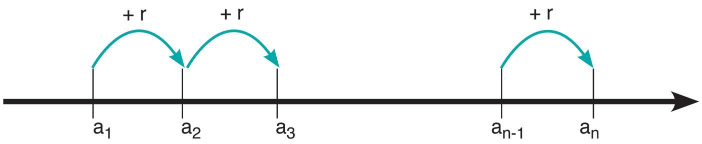
$$9{,}27142 = 9{,}4713 + (i - 0{,}01)\frac{9{,}222 - 9{,}4713}{0{,}015 - 0{,}01} \text{ d'où } i = 1{,}40\ \%.$$

2 LES SUITES

Les suites sont utilisées principalement lors des calculs de placements financiers.

SUITES ARITHMÉTIQUES

Une suite en progression arithmétique est une suite numérique, dont chaque terme s'obtient en ***ajoutant*** au précédent un terme réel constant appelé la ***raison***, notée r. L'ordre des termes est important, c'est pourquoi un rang lui est donné.



$a_1 + r$ $\quad$ $a_2 + r$

$a_1 + 2r$ $\quad$ $a_1 + (n-1)r$

$$\boxed{\mathbf{a_n} = a_{n-1} + r = a_1 + (n-1)r}$$

avec a_n le $n^{ième}$ terme, a_1 le premier terme et n le nombre de termes.

- Si $r > 0$, alors la suite est croissante.
- Si $r < 0$, alors la suite est décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite est constante.

La somme S d'une suite arithmétique est :

$$\mathbf{S} = \frac{\text{Valeur du } 1^{er} \text{ terme + Valeur du dernier terme}}{2} \times \text{Nombre de termes}$$

$$= \frac{a_1 + a_n}{2} \times n$$

Les suites arithmétiques trouvent leur application lors d'un retrait ou d'un ajout d'une même valeur à chaque période, lors du calcul des intérêts simples.

Exemple : Monsieur Trésor signe un contrat de maintenance sur 10 ans. La valeur initiale est de 1 000 €. Il est envisagé de l'augmenter de 100 € par an. Combien aura-t-il décaissé à la fin du contrat ?

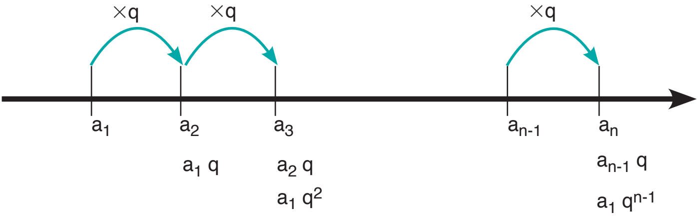
$a_1 = 1\ 000$; $a_2 = a_1 + 100 = 1\ 100$. Nous sommes en présence d'une suite arithmétique de raison $r = 100$.

Pour connaître le montant total versé à la fin du contrat, il convient de calculer $a_{10} = a_1 + 9\ r = 1\ 000 + 9 \times 100 = 1\ 900$

$S = \dfrac{1\ 000 + 1\ 900}{2} \times 10 = 14\ 500$ € montant versé à la fin du contrat.

SUITES GÉOMÉTRIQUES

Une suite en progression géométrique est une suite numérique dont chaque terme s'obtient ***en multipliant*** le terme précédent par un nombre réel constant non nul appelé la ***raison***, notée q. L'ordre des termes est important, c'est pourquoi un rang lui est donné.



$$\boxed{\mathbf{a_n} = a_{n-1} \times q = a_1 \times q^{n-1}}$$

avec a_n le $n^{ième}$ terme, a_1 le premier terme et n le nombre de termes.

- Si $q > 1$, alors la suite est croissante.
- Si $q < 1$, alors la suite est décroissante.
- Si $q = 1$, alors la suite est constante.

La somme S d'une suite géométrique est :

$$\mathbf{S} = \frac{q \times \text{Valeur du dernier terme} - \text{Valeur du } 1^{er} \text{ terme}}{q-1}$$

$$= a_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ avec } q \neq 1$$

Ces suites trouvent leur application lorsqu'il est envisagé une augmentation constante chaque année (par exemple les salaires augmentent de 1 % chaque année, le calcul des intérêts composés).

Exemple : Monsieur Trésor signe un contrat de maintenance sur 10 ans. La valeur initiale est de 1 000 €. Il est envisagé de l'augmenter de 8 % par an. Combien aura-t-il décaissé à la fin du contrat ?

$a_1 = 1\,000$; $a_2 = a_1 \times 1,08 = 1\,080$

Nous sommes en présence d'une suite géométrique de raison q = 1,08.

$$S = 1\,000 \times \frac{1,08^{10} - 1}{1,08 - 1} = 14\,486,56 \text{ € montant versé à la fin du contrat.}$$

Parfois la suite peut être arithmétique et géométrique. Dans ce cas :

$$\mathbf{u_{n+1}} = a\,u_n + b \text{ et } u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$$

Exemple : Monsieur Trésor place sur un compte 600 € tous les mois. Chaque mois, il utilise 20 % de ce qu'il possède sur ce compte.

Quel montant peut-il y avoir au maximum sur ce compte ?

À la fin du premier mois : $M_1 = 600 - 600 \times 20\,\% = 480$; à la fin du deuxième mois : $M_2 = (480 + 600) \times 0,8 = 864$ €.

$M_2 = (M_1 + 600) \times 0,80 = 0,80\,M_1 + 480$. Ceci correspond à une suite arithmétique et géométrique.

$$M_n = 0,8^{n-1}\left(480 - \frac{480}{1-0,8}\right) + \frac{480}{1-0,8} = 0,8^{n-1} \times (-1\,920) + 1\,920$$

Quand n tend vers l'infini alors $0,8^{n-1} = 0$ alors $M_n = 1\,920$ € montant maximum du compte.